第四章
矩陣與線性方程組

習題 4-1

2. 設 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 2}$，若 $a_{ij}=i^2+j^2-1$，$1\leqslant i\leqslant 3$，$1\leqslant j\leqslant 2$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：因 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{3\times 2}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$ 又 $a_{ij}=i^2+j^2-1$

故 $a_{11}=1^2+1^2-1=1$，$a_{12}=1^2+2^2-1=4$，
$a_{21}=2^2+1^2-1=4$，$a_{22}=2^2+2^2-1=7$，
$a_{31}=3^2+1^2-1=9$，$a_{32}=3^2+2^2-1=12$

所以，
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$$

5. 下列哪一個矩陣是斜對稱矩陣？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -5 \\ 1 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & -6 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 6 \\ 4 & 1 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

解：$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 均非斜對稱矩陣，$\because$ $\boldsymbol{D}=-\boldsymbol{D}^T$，故 $\boldsymbol{D}$ 爲斜對稱矩陣.

7. 設 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的所有子矩陣.

解：$\boldsymbol{A}$ 的所有子矩陣計有 $[1]$，$[2]$，$[3]$，$[4]$，$\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\ 4\end{bmatrix}$，$[1,\ 3]$，$[2,\ 4]$，$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$；共九個.

習題 4-2

1. 設 $\begin{bmatrix}2x^2+1 & 3x+4y\\ 4x+y & y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3x+15 & 2y\\ -2x-3y & 9\end{bmatrix}$，求 x 與 y.

解：
$$\begin{cases}2x^2+1=3x+15 \cdots\cdots\cdots ①\\ 3x+4y=2y \cdots\cdots\cdots ②\\ 4x+y=-2x-3y \cdots\cdots\cdots ③\\ y^2=9 \cdots\cdots\cdots ④\end{cases}$$

須同時成立.

由 ① 式 $2x^2-3x-14=0 \Rightarrow (2x-7)(x+2)=0$，故 $x=-2$ 或 $x=\dfrac{7}{2}$

由 ④ 式 $y^2=9 \Rightarrow y=\pm 3$，由 ② 式 $3x=-2y$，由 ③ 式 $6x=-4y$

故知 $\begin{cases}x=-2\\ y=3\end{cases}$

3. 試求下列各矩陣之積.

(2) $\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ -3 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}3 & 4 & -1 & 5\\ -2 & 1 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\\ -2 & 3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

解：(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1\times1+2\times(-2)+4\times1 & 1\times(-1)+2\times1+4\times2 & 1\times1+2\times1+4\times(-3) \\ (-3)\times1+1\times(-2)+0\times1 & (-3)\times(-1)+1\times1+0\times2 & (-3)\times1+1\times1+0\times(-3) \\ 2\times1+(-1)\times(-2)+4\times1 & 2\times(-1)+(-1)\times1+4\times2 & 2\times1+(-1)\times1+4\times(-3) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 9 & -9 \\ -5 & 4 & -2 \\ 8 & 5 & -11 \end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \\ -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 3\times1+4\times3+(-1)\times(-2)+5\times(-1) & 3\times0+4\times4+(-1)\times3+5\times2 \\ (-2)\times1+1\times3+3\times(-2)+2\times(-1) & (-2)\times0+1\times4+3\times3+2\times2 \\ 4\times1+5\times3+6\times(-2)+7\times(-1) & 4\times0+5\times4+6\times3+7\times2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3+12+2-5 & 16-3+10 \\ -2+3-6-2 & 4+9+4 \\ 4+15-12-7 & 20+18+14 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12 & 23 \\ -7 & 17 \\ 0 & 52 \end{bmatrix}$$

4. 設 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，試求 $\boldsymbol{AB}$ 與 $\boldsymbol{BA}$.

解：因 $(\boldsymbol{B}^T)^T=\boldsymbol{B}$，故

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\times2+(-3)\times(-3)+1\times1+1\times1 & 2\times(-4)+(-3)\times0+1\times1+1\times2 & 2\times(-1)+(-3)\times3+1\times0+1\times1 \\ (-4)\times2+0\times(-3)+1\times1+2\times1 & -4\times(-4)+0\times0+1\times1+2\times2 & (-4)\times(-1)+0\times3+1\times0+2\times1 \\ (-1)\times2+3\times(-3)+0\times1+1\times1 & (-1)\times(-4)+3\times0+0\times1+1\times2 & (-1)\times(-1)+3\times3+0\times0+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 15 & -5 & -10 \\ -5 & 21 & 6 \\ -10 & 6 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 2\times2+(-4)\times(-4)+(-1)\times(-1) & 2\times(-3)+(-4)\times0+(-1)\times3 & 2\times1+(-4)\times1+(-1)\times0 & 2\times1+(-4)\times2+(-1)\times1 \\ (-3)\times2+0\times(-4)+3\times(-1) & (-3)\times(-3)+0\times0+3\times3 & (-3)\times1+0\times1+3\times0 & (-3)\times1+0\times2+3\times1 \\ 1\times2+1\times(-4)+0\times(-1) & 1\times(-3)+1\times0+0\times3 & 1\times1+1\times1+0\times0 & 1\times1+1\times2+0\times1 \\ 1\times2+2\times(-4)+1\times(-1) & 1\times(-3)+2\times0+1\times3 & 1\times1+2\times1+1\times0 & 1\times1+2\times2+1\times1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 21 & -9 & -2 & -7 \\ -9 & 10 & -3 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 3 \\ -7 & 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

7. 試解下列矩陣方程式中的 $\boldsymbol{X}$.

$$\boldsymbol{X}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

解：令 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$, 則 $\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

故 $\begin{bmatrix} x_{11}+3x_{12} & -x_{11} & 2x_{11}+x_{12} \\ x_{21}+3x_{22} & -x_{21} & 2x_{21}+x_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

解 $\begin{cases} x_{11}+3x_{12}=-5 \\ 2x_{11}+x_{12}=0 \end{cases}$ 與 $\begin{cases} x_{21}+3x_{22}=6 \\ 2x_{21}+x_{22}=7 \end{cases}$

得 $x_{12}=-2$，$x_{11}=1$，$x_{22}=1$，$x_{21}=3$

故 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$.

11. 若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，且 n 爲非負整數，試證：$(\boldsymbol{AB})^n=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n$.

解：因 $(\boldsymbol{AB})^n=\underbrace{(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})}_{n\text{ 個}}$

$$
\begin{aligned}
&=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\boldsymbol{B}\\
&=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{B}\quad(\because\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA})\\
&=\boldsymbol{A}^2\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\boldsymbol{B}^2\\
&=\boldsymbol{A}^2\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{AB})\cdot\boldsymbol{B}^2\quad(\because\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA})\\
&=\boldsymbol{A}^3\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\cdots\cdot(\boldsymbol{BA})\cdot\boldsymbol{B}^3\\
&=\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B}^{n-1}\\
&=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B}^{n-1}\quad(\because\ \boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA})\\
&=\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{B}^n
\end{aligned}
$$

習題 4-3

1. 試問下列方陣是否可逆？若爲可逆，求其逆方陣.

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

解：(1) 利用 (4-3-1) 式，因 $ad-bc=3\times2-1\times6=0$，故 $\boldsymbol{A}$ 爲不可逆.

3. 若 $\boldsymbol{A}$ 爲一可逆方陣，且 $7\boldsymbol{A}$ 的逆方陣爲 $\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

解：因 $(7\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$，故

$$7\boldsymbol{A}=\frac{1}{-3\times(-2)-7\times1}\begin{bmatrix}-2 & -7\\ -1 & -3\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-2 & -7\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

所以，
$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2 & 7\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7} & 1\\ \frac{1}{7} & \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

4. 若 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{B}$ 皆為 n 階方陣，則下列關係是否成立？

(1) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ (2) $(c\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$ $(c\neq0)$

解：(1) $\because$
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1})\\&=\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{I}_n\\&=2\boldsymbol{I}_n+\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\\&\neq\boldsymbol{I}_n\end{aligned}$$

$\therefore$ $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}\neq\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$

(2) $\because$ $(c\boldsymbol{A})\cdot\left(\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=c\cdot\left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\left(c\cdot\frac{1}{c}\right)(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1})=\boldsymbol{I}_n$

$\therefore$ $(c\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{c}\boldsymbol{A}^{-1}$

6. 試求 x 使得 $\begin{bmatrix}2x & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}$.

解：因
$$\begin{bmatrix}2x & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}^{-1}$$

又
$$\begin{bmatrix}2 & -7\\ -1 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{8-7}\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

所以 $\begin{bmatrix} 2x & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2x=4$，故 $x=2$

9. 若 $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$，試求 $(2\boldsymbol{A})^{-3}$.

解：$(2\boldsymbol{A})^{-3}=\dfrac{1}{8}\boldsymbol{A}^{-3}=\dfrac{1}{8}(\boldsymbol{A}^3)^{-1}$

因 $\boldsymbol{A}^3=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (\boldsymbol{A}^3)^{-1}=\dfrac{1}{-2+5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$

故 $(2\boldsymbol{A})^{-3}=\dfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -\dfrac{2}{3} & -\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{1}{12} & -\dfrac{1}{24} \\ \dfrac{5}{24} & \dfrac{1}{24} \end{bmatrix}$

習題 4-4

1. 下列何者爲基本矩陣？

(5) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：(5) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 非基本矩陣.

2. 試決定列運算以還原下面各基本矩陣爲單位矩陣.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

解：(2) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{6}R_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 考慮下列的矩陣

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

求基本矩陣 $\boldsymbol{E}_1$、$\boldsymbol{E}_2$、$\boldsymbol{E}_3$ 與 $\boldsymbol{E}_4$，使得

(1) $\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$　(2) $\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$　(3) $\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$　(4) $\boldsymbol{E}_4\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$

解：(1) $\boldsymbol{A} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{E}_3 \cdot \boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{E}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_1\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\boldsymbol{B}$$

(2) $\boldsymbol{B} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\sim} \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{E}_3 \cdot \boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{E}_1 \leftrightarrow \boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_2\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

(3) $\boldsymbol{A} \overset{-2R_1+R_3}{\sim} \boldsymbol{C} \Leftrightarrow \boldsymbol{C}=-2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3 \cdot \boldsymbol{A}$

$$-2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_3\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}=\boldsymbol{C}$$

(4) $\boldsymbol{C} \overset{2R_1+R_3}{\sim} \boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}=2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3\cdot\boldsymbol{C}$

$$2\boldsymbol{E}_1+\boldsymbol{E}_3=\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{E}_4\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}$$

4. 求下列方陣的逆方陣**.**

(2) $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

解：(2) $[\boldsymbol{B} \,\vdots\, \boldsymbol{I}_3]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$$\overset{-3R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -14 & -8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{-2R_3+R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & -8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{\tfrac{1}{2}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & -8 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{8R_3+R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{-\tfrac{1}{6}R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right] \underset{\sim}{-1R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{array}\right] \underset{\sim}{1R_3+R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{array}\right]$$

$$\therefore \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} \end{bmatrix}$$

5. 下列各矩陣中，哪些爲簡約列梯陣？

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解：$\boldsymbol{A}$ 是簡約列梯陣.　　$\boldsymbol{B}$ 是簡約列梯陣.

$\boldsymbol{C}$ 不是簡約列梯陣.　　$\boldsymbol{D}$ 不是簡約列梯陣.

6. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$，求出一簡約列梯陣 $\boldsymbol{C}$ 使其列同義於 $\boldsymbol{A}$.

解：
$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-1R_3+R_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-3R_1+R_4}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -11 & -8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-1R_1+R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -11 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{3R_2+R_3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -11 & -8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{2R_2+R_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-1R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{-\frac{1}{7}R_3}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{2R_3+R_2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{17}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\xrightarrow{-5R_3+R_1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dfrac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{17}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dfrac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\xrightarrow{\frac{1}{8}R_4}}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{2}{7}R_4+R_3 \\ \frac{17}{7}R_4+R_2 \\ -\frac{11}{7}R_4+R_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

故 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 即 $\boldsymbol{C}\sim\boldsymbol{A}$.

習題 4-5

1. 試利用高斯後代法解下列方程組.

(3) $\begin{cases} x_2-2x_3+x_4=1 \\ 2x_1-x_2-x_4=0 \\ 4x_1+x_2-6x_3+x_4=3 \end{cases}$

解：(3) $\left[\begin{array}{cccc:c} 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{R_1\leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right]$

$$\underset{\frac{1}{2}R_1}{\sim} \left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -6 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{-4R_1+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{3}R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\sim}{-1R_2+R_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1-\frac{1}{2}x_2 \qquad -\frac{1}{2}x_4=0 \\ \qquad x_2-2x_3+\quad x_4=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_4=t,\ t\in\mathbb{R} \\ x_3=s,\ s\in\mathbb{R} \\ x_2=1+2s-t \end{array}$$

$$x_1=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_4=\frac{1}{2}+s-\frac{t}{2}+\frac{t}{2}=\frac{1}{2}+s$$

$$\therefore \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}+s \\ x_2=1+2s-t \\ x_3=s \\ x_4=t \end{cases} \quad s\in\mathbb{R},\ t\in\mathbb{R}$$

2. 試利用高斯-約旦消去法解下列方程組**.**

$$(2)\begin{cases} \qquad -x_2+x_3=3 \\ x_1-x_2-x_3=0 \\ -x_1 \qquad -x_3=-3 \end{cases}$$

解：(2) $\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{R_1\leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{array}\right] \underset{\sim}{1R_1+R_3}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-1R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & -2 & \vdots & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-1R_2+R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & -3 & \vdots & -6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-\frac{1}{3}R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-1R_3+R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{-1R_3+R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{-1R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$$

$\therefore\ x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=2$

5. 求出下列各線性方程組係數矩陣的逆方陣以解方程組.

(1) $\begin{cases} 6x_1-2x_2-3x_3=1 \\ -x_1+x_2=-1 \\ -x_1+x_3=2 \end{cases}$

解：(1) 此方程組的矩陣形式爲

$$\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

先求出 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆方陣.

$$[A \,\vdots\, I_3]=\left[\begin{array}{rrr:rrr} 6 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1\leftrightarrow R_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr:rrr} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{-1R_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{1R_1+R_2 \\ -6R_1+R_3}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \overset{2R_2+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{1R_3+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\overset{1R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{rrr:rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

得
$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

故方程組的解爲 $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

即 $x_1=5$，$x_2=4$，$x_3=7$

7. 若 $A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$，求齊次方程組 $(\lambda I_2-A)\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 有非必然解的所有 λ 值.

解：$(\lambda I_2-A)\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$

$$\Rightarrow \left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}\right)\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ 2 & \lambda-2\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

因

$$\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ 2 & \lambda-2\end{bmatrix}\overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ 1 & \frac{1}{2}(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

$$\overset{-(\lambda+1)R_2+R_1}{\sim}\begin{bmatrix}0 & 2-\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda+1)\\ 1 & \frac{1}{2}(\lambda-2)\end{bmatrix}$$

若 $\begin{bmatrix}\lambda+1 & 2\\ 2 & \lambda-2\end{bmatrix}$ 爲奇異方陣，就有非必然解，亦即，

$$2-\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda+1)=0$$
$$\Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+1)=4$$
$$\Rightarrow \lambda^2-\lambda-6=0$$
$$\Rightarrow \lambda=3 \text{ 或 } \lambda=-2$$

習題 4-6

1. 在下列各題中，選定一行或列，以餘因子展開求行列式的值.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\\ 1 & 0 & -4\\ 1 & -3 & 5\end{bmatrix}$

解：(2) $\det(\boldsymbol{A})=3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & 5\end{vmatrix}+0(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+(-3)(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -4\end{vmatrix}$

$$=-3(5+4)+0(15-1)+3(-12-1)$$
$$=-66$$

2. 利用行列式的性質求下列各行列式的值.

(2) $\begin{vmatrix} -4 & -10 & 8 & 5 \\ -5 & -9 & 9 & 4 \\ -3 & -11 & 7 & 6 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

解：(2) 原式$=\begin{vmatrix} -4 & -10 & 8 & 5 \\ -5 & -9 & 9 & 4 \\ -3 & -11 & 7 & 6 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ $\times(-1)$ $\times(-1)=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -9 & 9 & 4 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$

$=-2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ -5 & -9 & 9 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}=0$ (第三列提 -2，一、三列相等)

6. 設

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

(1) 求 adj $\boldsymbol{A}$. (2) 計算 $\det(\boldsymbol{A})$. (3) 證明 $\boldsymbol{A}(\text{adj } \boldsymbol{A})=(\det(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{I}_3$.

解：(1) $\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}|\boldsymbol{M}_{11}|=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8-15=-7$

$\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}|\boldsymbol{M}_{12}|=-\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=5$

$\boldsymbol{A}_{13}=(-1)^{1+3}|\boldsymbol{M}_{13}|=\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=-4$

$\boldsymbol{A}_{21}=(-1)^{2+1}|\boldsymbol{M}_{21}|=-\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=8$

$$\boldsymbol{A}_{22}=(-1)^{2+2}|\boldsymbol{M}_{22}|=\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}=4$$

$$\boldsymbol{A}_{23}=(-1)^{2+3}|\boldsymbol{M}_{23}|=-\begin{vmatrix}3&-1\\1&3\end{vmatrix}=-10$$

$$\boldsymbol{A}_{31}=(-1)^{3+1}|\boldsymbol{M}_{31}|=\begin{vmatrix}-1&2\\4&5\end{vmatrix}=-13$$

$$\boldsymbol{A}_{32}=(-1)^{3+2}|\boldsymbol{M}_{32}|=-\begin{vmatrix}3&2\\0&5\end{vmatrix}=-15$$

$$\boldsymbol{A}_{33}=(-1)^{3+3}|\boldsymbol{M}_{33}|=\begin{vmatrix}3&-1\\0&4\end{vmatrix}=12$$

故 $\text{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{13}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}&\boldsymbol{A}_{33}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-7&5&-4\\8&4&-10\\-13&-15&12\end{bmatrix}^T$

$$=\begin{bmatrix}-7&8&-13\\5&4&-15\\-4&-10&12\end{bmatrix}$$

(2) $\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}3&-1&2\\0&4&5\\1&3&2\end{vmatrix}\times(-3)=\begin{vmatrix}0&-10&-4\\0&4&5\\1&3&2\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}-10&-4\\4&5\end{vmatrix}$

$$=-50+16=-34$$

(3) $\boldsymbol{A}(\text{adj}\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}3&-1&2\\0&4&5\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&8&-13\\5&4&-15\\-4&-10&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-34&0&0\\0&-34&0\\0&0&-34\end{bmatrix}$

$$\det(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{I}_3=(-34)\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-34&0&0\\0&-34&0\\0&0&-34\end{bmatrix}$$

$\therefore\ \boldsymbol{A}(\text{adj}\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{I}_3$

7. 設 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$，若 $\det(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=0$，求 λ 的值.

解：因 $\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A}=\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda+3 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{bmatrix}$

所以，$\det(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 3 \\ 0 & \lambda-3 & 0 \\ 2 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix}=0$

$$\Rightarrow (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+3 & 3 \\ 2 & \lambda+2 \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda-3)[(\lambda+3)(\lambda+2)-6]=0$$
$$\Rightarrow (\lambda-3)(\lambda^2+5\lambda)=0$$
$$\Rightarrow \lambda=-5 \text{ 或 } \lambda=0 \text{ 或 } \lambda=3$$

9. 試解下列之線性方程組

$$\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ 4x_2+5x_3=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

解：原線性方程組之矩陣方程式為

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由第 7 題知，$\det(\boldsymbol{A})=-34$，$\operatorname{adj}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -7 & 8 & -13 \\ 5 & 4 & -15 \\ -4 & -10 & 12 \end{bmatrix}$

可得 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\operatorname{adj}(\boldsymbol{A})=\dfrac{1}{-34}\begin{bmatrix}-7 & 8 & -13\\ 5 & 4 & -15\\ -4 & -10 & 12\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{34} & -\dfrac{8}{34} & \dfrac{13}{34}\\[2mm] -\dfrac{5}{34} & -\dfrac{4}{34} & \dfrac{15}{34}\\[2mm] \dfrac{4}{34} & \dfrac{10}{34} & -\dfrac{12}{34}\end{bmatrix}$$

則 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{7}{34} & -\dfrac{8}{34} & \dfrac{13}{34}\\[2mm] -\dfrac{5}{34} & -\dfrac{4}{34} & \dfrac{15}{34}\\[2mm] \dfrac{4}{34} & \dfrac{10}{34} & -\dfrac{12}{34}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{15}{34}\\[2mm] -\dfrac{1}{34}\\[2mm] -\dfrac{6}{34}\end{bmatrix}$

10. 下列的齊次方程組是否有非必然解？

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2 \qquad\quad + \; x_4=0\\ x_1+2x_2+3x_3 \qquad =0\\ \qquad\qquad x_3+2x_4=0\\ \qquad x_2+2x_3-\; x_4=0\end{cases}$

解：(2) 因 $\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\1&2&3&0\\0&0&1&2\\0&1&2&-1\end{vmatrix}\times(-1)=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&0&3&-1\\0&0&1&2\\0&1&2&-1\end{vmatrix}$

$$=1\cdot\begin{vmatrix}0&3&-1\\0&1&2\\1&2&-1\end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}=6+1=7\neq 0$$

故方程組有必然解.

11. 利用克雷莫法則解下列各方程組**.**

$$(2)\begin{cases} x_1+x_2+\ x_3+x_4= \ \ 4\\ x_1 \qquad -2x_3+x_4= \ \ 3\\ \qquad x_2+3x_3-x_4=-1\\ 2x_1+x_2 \qquad +x_4= \ \ 6\end{cases}$$

解：(2) $\det(\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&0&-2&1\\0&1&3&-1\\2&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\1&0&0&1\\0&1&3&-1\\2&1&4&1\end{vmatrix}$

$\times(2)$　　　　　$\times(-1)$

$$=\begin{vmatrix}1&1&3&0\\1&0&0&0\\0&1&3&-1\\2&1&4&-1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&3&0\\1&3&-1\\1&4&-1\end{vmatrix}$$

$$=-1$$

$$\det(\boldsymbol{A}_1)=\begin{vmatrix}4&1&1&1\\3&0&-2&1\\-1&1&3&-1\\6&1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&0&-2&1\\2&1&3&-1\\3&1&0&1\end{vmatrix}$$

$\times(-3)$　　　　　$\times(2)$

$$=\begin{vmatrix}1&1&3&1\\0&0&0&1\\2&1&1&-1\\3&1&2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\2&1&1\\3&1&2\end{vmatrix}=-3$$

$$\det(\boldsymbol{A}_2)=\begin{vmatrix}1&4&1&1\\1&3&-2&1\\0&-1&3&-1\\2&6&0&1\end{vmatrix}\times(1)=\begin{vmatrix}1&4&1&1\\1&2&1&0\\0&-1&3&-1\\2&6&0&1\end{vmatrix}\times(1)$$

$$=\begin{vmatrix}1&4&1&1\\1&2&1&0\\0&-1&3&-1\\2&5&3&0\end{vmatrix}\times(1)=\begin{vmatrix}1&3&4&0\\1&2&1&0\\0&-1&3&-1\\2&5&3&0\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&3&4\\1&2&1\\2&5&3\end{vmatrix}=2$$

$$\det(\boldsymbol{A}_3)=\begin{vmatrix}1&1&4&1\\1&0&3&1\\0&1&-1&-1\\2&1&6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&4&2\\1&0&3&1\\0&1&-1&0\\2&1&6&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&5&2\\1&0&3&1\\0&1&0&0\\2&1&7&2\end{vmatrix}$$

$$\times(1)\qquad\qquad\times(1)$$

$$=-\begin{vmatrix}1&5&2\\1&3&1\\2&7&2\end{vmatrix}=-1$$

$$\det(\boldsymbol{A}_4)=\begin{vmatrix}1&1&1&4\\1&0&-2&3\\0&1&3&-1\\2&1&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-2&4\\1&0&-2&3\\0&1&0&-1\\2&1&-3&6\end{vmatrix}$$

$$\times(-3)\qquad\qquad\times(1)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 7 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 7 \end{vmatrix}=-2$$

故

$$x_1=\frac{\det(\boldsymbol{A}_1)}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{-3}{-1}=3$$

$$x_2=\frac{\det(\boldsymbol{A}_2)}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$x_3=\frac{\det(\boldsymbol{A}_3)}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{-1}{-1}=1$$

$$x_4=\frac{\det(\boldsymbol{A}_4)}{\det(\boldsymbol{A})}=\frac{-2}{-1}=2$$

習題 4-7

1. 試求下列各矩陣之特徵多項式**.**

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

解：(4) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$P(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -3 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)+4+(\lambda-1)-6(\lambda-1)$$
$$=\lambda^3-4\lambda^2+7$$

2. 試求下列各矩陣之特徵值及特徵向量**.**

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

解：(2) 令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$，假設 λ 爲 $\boldsymbol{A}$ 之特徵值，則 $\boldsymbol{A}$ 之特徵方程式爲

$$\det(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$$

利用行列式之性質將上式化爲

$$(\lambda-2)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 1 & \lambda-2 \end{vmatrix}=0$$

故 $$(\lambda-2)[(\lambda-3)(\lambda-2)-2]=0$$

展開得 $(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+4)=0$ 或 $(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0$

故求得 $\boldsymbol{A}$ 之特徵值爲 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=4$.

令 $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 爲 $\boldsymbol{A}$ 對應於 λ 之特徵向量若且唯若 $\mathbf{x}$ 爲方程式 $(\lambda \boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的非必然解，亦即，

$$\begin{bmatrix} \lambda-2 & 2 & -3 \\ 0 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(i) 令 $\lambda_1=1$ 代入 ① 式中，得

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此方程組之擴增矩陣爲

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2+R_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

求得其解爲 $\begin{bmatrix} -r \\ r \\ r \end{bmatrix}$，$r$ 爲任意實數，因此 $\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 爲 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_1=1$ 之特徵向量.

(ii) 令 $\lambda_2=2$ 代入 ① 式中，得

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此方程組之擴增矩陣爲

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_3+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\frac{1}{2}R_2}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-2R_3+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{3}R_1}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_1+R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

求得其解爲 $\begin{bmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，$r$ 爲任意實數，因此 $\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 爲 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_2=2$ 之特徵向量.

(iii) 令 $\lambda_3=4$ 代入 ① 式中，得

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

此方程組之擴增矩陣爲

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{-2R_2+R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \overset{-R_2+R_3}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{-\frac{1}{2}R_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

求得其解為 $\begin{bmatrix} \frac{7}{2}r \\ -2r \\ r \end{bmatrix}$，$r$ 為任意實數，因此 $\mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ 為 $\boldsymbol{A}$ 對應於 $\lambda_3=4$ 之特徵向量.

習題 4-8

1. 下列各矩陣中，哪些是可對角線化？

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$　　(5) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

解：(2) 設

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2$$

令 $P(\lambda)=0 \Rightarrow (\lambda-1)^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$

因特徵多項式有重根，故由定理 4-8-2 推論，$\boldsymbol{A}$ 為不可被對角線化矩陣.

(5) 設

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda)=\det(\lambda\boldsymbol{I}_3-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-3)^3$$

令

$$P(\lambda)=0 \Rightarrow (\lambda-1)^3=0$$
$$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=3 \quad \text{(相等的實根)}$$

故由定理 4-8-2 推論，$\boldsymbol{A}$ 不可被對角線化.

習題 4-9

1. 試就下列每一個矩陣，計算 e^A.

(2) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

解：(2) $\boldsymbol{A}$ 之特徵值為 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=3$ 且特徵向量為

$$\mathbf{x}_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}、\mathbf{x}_2=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ 與 } \mathbf{x}_3=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

於是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PDP}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

故　$$e^A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^0 & 0 & 0 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 2e^2 & e^3 \\ 0 & e^2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e^3 & 2e^2-2e^3 & -\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}e^3 \\ 0 & e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$